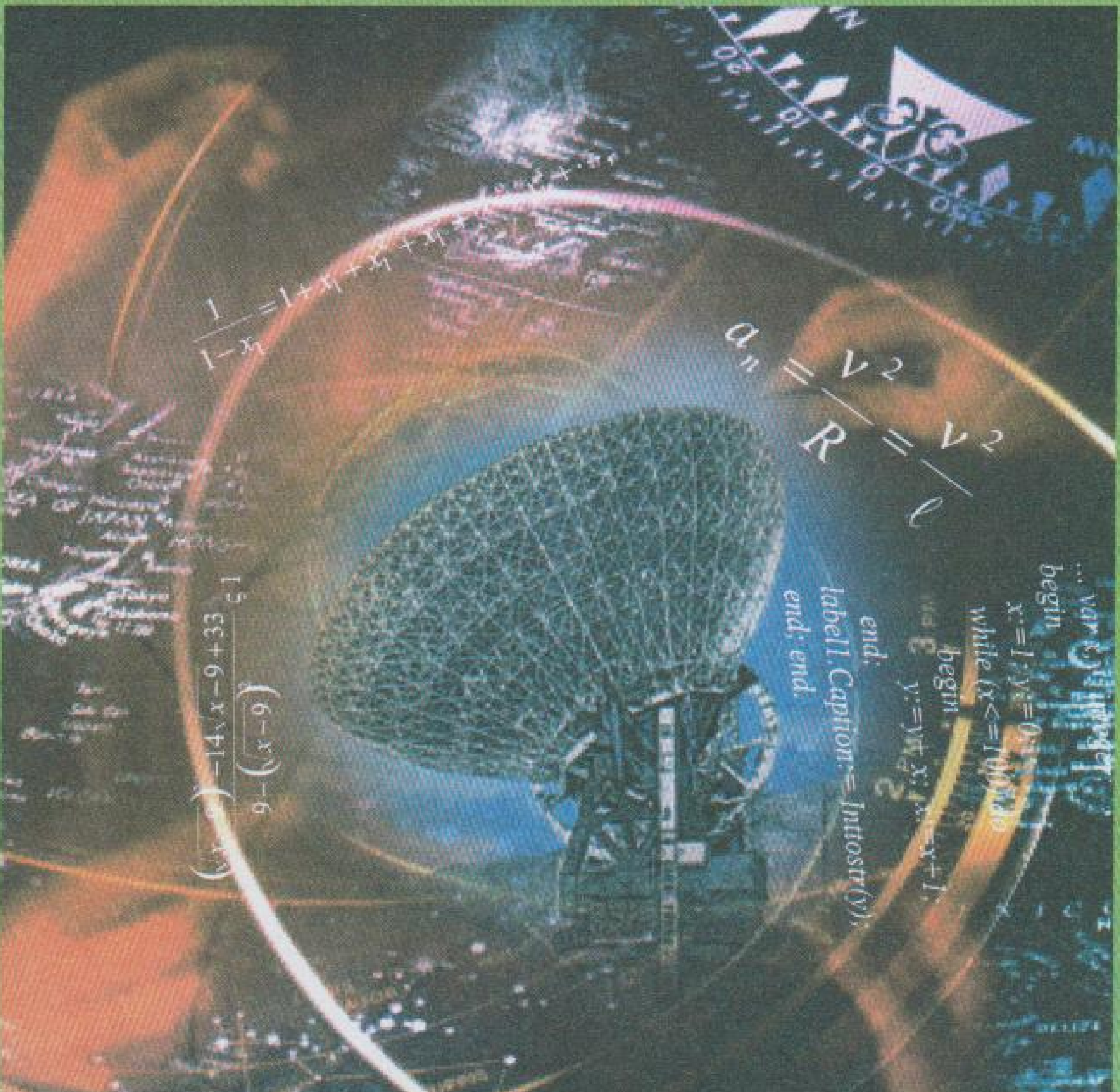
ISSN 2091-5586

FIZIKA, MATEMATIKA va INFORMATIKA

5/2017



MUNDARIJA

SONNING BUTUN VA KASR QISMIGA BOG'LIQ NOSTANDART MASALALARNI YECHISH

B.I. Abdullayev, M.D.Vaisova, *Urganch davlat universiteti*
D.J.Xujamov, *TATU Urganch filiali*

Ushbu maqola haqiqiy sonlarning butun qismi va kasr qismlari bilan bog'liq ba'zi nostandart tenglamalarni yechish usullariga bag'ishlanadi.
Tayanch so'zlar. *Sonning butun qismi, sonning kasr qismi, kvadrat tenglama, tenglamaning butun yechimi, tenglama ildizi.*
This article is devoted to methods of solving some non-standard equations with an integer and fractional parts of the real numbers.
Keywords. *The fractional part of number, the integer part of number, quadratic equation, integer solution of the equation, root of the equation.*
Данная статья посвящается методам решения некоторых нестандартных уравнений с целыми и дробными частями действительных чисел.
Ключевые слова. *Целая часть числа, дробная часть числа, квадратное уравнение, целое решение уравнения, корень уравнения.*

O'quvchilarni nostandart masalalarni yechishga o'rgatish ularni matematik bilimlarini oshirishda muhim ahamiyatga ega bo'lishi bilan birga ularning mantiqiy fikrlash qobiliyatini ham rivojlantiradi. Bunday misol va masalalarni yechishda nazariy bilimlarni puxta bilish va bu bilimlardan mantiqiy xulosalar yasay olish muhimdir. Ushbu maqola haqiqiy sonning butun qismi va kasr qismlari bilan bog'liq nostandart misollarni yechish usullariga bag'ishlangan bo'lib, u o'quvchilarni turli bellashuvlar va olimpiadalarga tayyorlashda zarur qo'llanma bo'la oladi deb hisoblaymiz.

Ushbu maqolada

$$A_1x^2+A_2[x]^2+A_3\{x\}^2+B_1x[x]+B_2[x]\{x\}+B_3\{x\}x+C_1x+C_2[x]+C_3\{x\}+D=0 \quad (1)$$

(bunda A_i, B_i, C_i $(i=1,2,3), D$ - haqiqiy sonlar) ko'rinishdagi tenglamani yechishning nazariy usuli keltiriladi va bir nechta misollar yechib beriladi. (1) tenglamadagi $\{x\}$ o'rniga $x-[x]$ sonni qo'yib, tenglamada shakl almashtirishini bajarib, uni

$$ax^2 + bx[x] + c[x]^2 + dx + e[x] + g = 0 \qquad (2)$$

ko'rinishga keltiramiz, bunda

$$a = A_1 + A_3 + B_3, \qquad b = -2A_3 + B_1 + B_2 - B_3, \qquad c = A_2 + A_3 - B_2,$$
$$d = C_1 + C_3, \; e = C_2 - C_3, \; g = D.$$

Endi (2) tenglamada $[x] = k \; (k \in Z)$ belgilash kiritib,

$$ax^2 + (bk + d)x + ck^2 + ek + g = 0 \qquad (3)$$

tenglamaning $[k, k+1)$ oraliqdagi yechimini izlaymiz.

1) $a \neq 0$ holatda (3) tenglamaning yechimga ega bo'lishining zaruriy sharti

$$(bk+d)^2 - 4a(ck^2 + ek + g) = (b^2 - 4ac)k^2 + 2(bd - 2ea)k + d^2 - 4ag \geq 0$$

tengsizlikning bajarilishidan iboratdir. Agar

$$(b^2 - 4ac)k^2 + 2(bd - 2ea)k + d^2 - 4ag \geq 0 \qquad (4)$$

tengsizlik k ga nisbatan butun yechimga ega bo'lmasa, u holda (3) tenglama ham yechimga ega bo'lmaydi. Shuning uchun biz (4) tengsizlik k ga nisbatan butun yechimga ega bo'lgan holatdagina (3) tenglamaning yechimini izlashimiz mumkin.

Agar

a) $b^2 - 4ac > 0$ bo'lsa, (4) tengsizlik sanoqlita butun yechimga ega;

b) $b^2 - 4ac = 0, \; bd - 2ea \neq 0$ bo'lsa, (4) tengsizlik sanoqlita butun yechimga ega;

c) $b^2 - 4ac = 0, \; bd - 2ea = 0, \; d^2 - 4ag \neq 0$ bo'lsa, (4) tengsizlik yechimga ega emas;

d) $b^2 - 4ac = 0, \; bd - 2ea = 0, \; d^2 - 4ag = 0$ bo'lsa, (4) tengsizlik cheksiz ko'p yechimga ega;

e) $b^2 - 4ac < 0$ bo'lsa, (4) tengsizlik ko'pi bilan cheklita butun yechimga ega.

Aytaylik, λ butun son (4) tengsizlikning ixtiyoriy butun yechimi bo'lsin. U holda (3) tenglama x ga nisbatan kvadrat tenglama bo'lgani uchun karrasi bilan hisoblaganda ikkita $x_1(\lambda)$ va $x_2(\lambda)$ ildizlarga ega. Endi (2) tenglamani ildizini topish uchun $\lambda \le x_1(\lambda) \le \lambda+1$ $(\lambda \le x_2(\lambda) \le \lambda+1)$ tengsizlikni λ ga nisbatan yechamiz. Aytaylik, tengsizlikning yechimlari $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ... (\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_n^*, ...)$ bo'lsin. U holda ularga mos $x_1(\lambda_n)$ $(x_2(\lambda_n^*))$ $(n=1,2,3,...)$ sonlar (2) tenglamaning yechimi bo'ladi.

2) $a=0$ bo'lgan holatda (3) tenglama

$$(bk+d)x+ck^2+ek+g=0 \qquad (5)$$

ko'rinishga keladi. Agar

a) $bk+d=0,\quad ck^2+ek+g=0$ bo'lsa (5) tenglama cheksiz ko'p yechimga ega. U holda istalgan haqiqiy son (2) tenglamaning yechimi bo'ladi;

b) $bk+d=0,\quad ck^2+ek+g\neq 0$ bo'lsa (5) tenglama yechimga ega emas;

c) $bk+d\neq 0$ bo'lsa, u holda (5) tenglamaning yechimi $x=-\dfrac{ck^2+ek+g}{bk+d}$ dan iborat bo'ladi. Agar $k \le -\dfrac{ck^2+ek+g}{bk+d} < k+1$ tengsizlikning butun yechimlarini k_n $(n \in N)$ bilan belgilasak, $x_n=-\dfrac{ck_n^2+ek_n+g}{bk_n+d}$ lar (5) tenglamaning yechimlarini ifodalaydi.

Biz (2) ko'rinishdagi tenglamaning yechimini topishning nazariy usulini keltirdik. Endi amaliy jarayonini ko'ramiz, ya`ni bir nechta misollar yordamida yechim izlash jarayonini ko'rsatamiz.

1-misol. Tenglamani yeching: $x^2-7[x]-2016=0$ (6)

Yechish. (6) tenglama $[x]=k,\ k\in Z$ belgilashdan keyin $x^2=7k+2016$ kvadrat tenglamaga keltiriladi. So'nggi kvadrat tenglama $k\ge -288$ shartda $x_1(k)=\sqrt{7k+2016}$, $x_2(k)=-\sqrt{7k+2016}$ yechimlarga ega bo'ladi. Agar $k\le x<k+1$ tengsizlikni e'tiborga olsak, $k\le\sqrt{7k+2016}<k+1$ va $k\le-\sqrt{7k+2016}<k+1$ tengsizliklarga ega bo'lamiz. Bu tengsizliklardan birinchisi

$k=48$, ikkinchisi $k=-42$ butun yechimlarga ega. Bu sonlarni $x^2=7k+2016$ tenglamaga qo'yib, (6) tenglama $x=\sqrt{2352}$, $x=-\sqrt{1722}$ yechimlarga ega bo'lishini topamiz.

2-misol. Tenglamani yeching:

$$2x^2-3x[x]+[x]^2+2x-[x]-3=0 \qquad (7)$$

Yechish. Bu yerda ham $[x]=k, k\in Z$ belgilash kiritsak, (7) tenglama

$$2x^2-(3k-2)x+k^2-k-3=0 \qquad (8)$$

ko'rinishga keladi. Bizga ma`lumki, (8) tenglama yechimga ega bo'lishi uchun

$$D=(3k-2)^2-8(k^2-k-3)=k^2-4k+28=(k-2)^2+24\geq 0$$

bo'lishi kerak. $D\geq 0$ tengsizlik esa barcha $k\in Z$ larda bajariladi. Endi (8) tenglamani x ga nisbatan yechib,

$$x_1(k)=\frac{3k-2+\sqrt{(k-2)^2+24}}{4},\ x_2(k)=\frac{3k-2-\sqrt{(k-2)^2+24}}{4}$$

ildizlarni topamiz. (8) tenglamaning yechimlari $k\leq x<k+1$ tengsizlikni qanoatlantirishi zarurligi sababli

$$k\leq\frac{3k-2+\sqrt{(k-2)^2+24}}{4}<k+1,\ k\leq\frac{3k-2-\sqrt{(k-2)^2+24}}{4}<k+1$$

tengsizliklarga ega bo'lamiz. Bu tengsizliklardan birinchisi $k=0,1,2,3$ butun yechimlarga ega. Bundan (7) tenglamaning $x_1(0)=\frac{\sqrt{7}-1}{2}$, $x_1(1)=\frac{3}{2}$, $x_1(2)=\frac{2+\sqrt{6}}{2}$, $x_1(3)=3$ yechimlarini topamiz. Ikkinchi tengsizlik esa yechimga ega emas. Buni tekshirib ko'rishni o'quvchiga havola qilamiz. Demak, (7) tenglama $x=\frac{\sqrt{7}-1}{2}$, $x=\frac{3}{2}$, $x=\frac{2+\sqrt{6}}{2}$, $x=3$ yechimlarga ega.

3-misol. Tenglamani yeching: $[x]^2=10\{x\}+2016$ (9)

Yechish. Agar $\{x\}=x-[x]$ tenglikdan foydalanib, $[x]=k, k\in Z$ belgilashni kiritsak (9) tenglama $k^2=10(x-k)+2016$ ko'rinishga keladi. Bu tenglamani x ga nisbatan yechib $x=\dfrac{k^2+10k-2016}{10}$ ni hosil qilamiz. $k\le x<k+1$ shartdan esa $k\le\dfrac{k^2+10k-2016}{10}<k+1$ qo'sh tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu tengsizliklarning butun yechimlari $k=-45,\ k=45$ dan iborat bo'ladi. Bundan (9) tenglama uchun $x=45{,}9$ va $x=-44{,}1$ yechimlariga ega bo'lamiz.

4-misol. Tenglamani yeching: $\{x\}^2+[x]\{x\}=2016$ (10)

Yechish: Bu misolda ham $[x]=k,\ \{x\}=t$ deb belgilash kiritsak, (10) tenglamani yechish $t^2+kt-2016=0$ tenglamani yechishga keltiriladi. So'nggi tenglama t ga nisbatan kvadrat tenglama bo'lib, u har doim yechimga ega, chunki $D=k^2+8064>0$ va uning ildizlari

$$t_1(k)=-\frac{k+\sqrt{k^2+8064}}{2};\quad t_2(k)=\frac{\sqrt{k^2+8064}-k}{2}$$

lardan iborat bo'ladi. t o'zgaruvchi sonning kasr qismini ifodalashini e`tiborga olsak, $0\le t_1(k)<1$ tengsizlik yechimga ega emas. $0\le t_2(k)<1$, ya`ni $0\le\dfrac{\sqrt{k^2+8064}-k}{2}<1$ tengsizlik esa barcha butun $k\ge 2016$ larda o'rinli. Demak, (10) tenglamaning yechimi

$$x(k)=k+\frac{\sqrt{k^2+8064}-k}{2}=\frac{\sqrt{k^2+8064}+k}{2},\ k\ge 2016$$

dan iborat bo'ladi.

5-misol. Tenglamani yeching: $x[x]=2016$ (11)

Yechish. Bu tenglamada $x=[x]+\{x\}$ tenglikdan foydalansak, u

$$[x]^2+[x]\{x\}-2016=0 \qquad (12)$$

ko'rinishiga keladi. Bu yerda ham $[x]=k$ belgilash kiritib, (12) tenglamadan $\{x\}$ ni topsak, $\{x\}=\dfrac{2016-k^2}{k}$ bo'ladi. Sonning kasr qismi xossasiga ko'ra $0 \le \dfrac{2016-k^2}{k} < 1$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu tengsizlikni yechib, $k=-45$ ni topamiz. Bundan $\{x\}=\dfrac{9}{45}=0,2.$ Demak, (11) tenglamaning yechimi $x=-45+0,2=-44,8$ bo'lar ekan.

6-misol. $\dfrac{2}{x}+\dfrac{x}{2}=[x],\ x\ne 0$ tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglama $[x]=k, k\in Z$ belgilashdan keyin

$$x^2-2kx+4=0 \qquad (13)$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglama yechimga ega bo'lishi uchun $D=4k^2-16\ge 0$ bo'lishi zarur, ya`ni $k\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. (13) tenglamani x ga nisbatan yechib $x_1(k)=k+\sqrt{k^2-4}$, $x_2(k)=k-\sqrt{k^2-4}$ ildizlarni topamiz. Endi $k\le k+\sqrt{k^2-4}<k+1$, $\left(k\le k-\sqrt{k^2-4}<k+1\right)$ tengsizliklarni yechib, $k=2$ $(k=-2)$ butun yechimlarni olamiz. Bu yechimlarni (13) tenglamaga qo'yib, $x=2$, $x=-2$ yechimlarni topamiz.

Yuqorida ko'rib chiqilgan usulni ba'zi uchinchi darajali tenglamalarga ham qo'llash mumkin.

7-misol. Tenglamani yeching: $x^3-[x]=3 \qquad (14)$

Yechish. $[x]=k, k\in Z$ almashtirishdan so'ng (14) tenglama $x^3=k+3$ ko'rinishga keladi. Bu tenglamadan x ni topib, $k\le x<k+1$ tengsizliklarga qo'yib, $k^3\le k+3$ va $(k+1)>k+3$ tengsizliklarga ega bo'lamiz. Hosil bo'lgan bu tengsizliklardan birinchisini $(k-1)k(k+1)\le 3$ va ikkinchisini $(k+1)k(k+2)>2$ ko'rinishda yozib olamiz. Bu tengsizliklar uchun agar $k\ge 2$ bo'lsa, $(k-1)k(k+1)>3$ bo'ladi va agar $k\le -2$ bo'lsa $(k+2)k(k+2)\le 0<2$ bo'ladi. Shuning uchun ushbu tengsizliklarning butun yechimlari $k=-1,0,1$ sonlardan iborat bo'ladi. Topilgan butun yechimlardan foydalanib, (14) tenglama faqat $x=\sqrt[3]{4}$ yechimga ega bo'lishini topamiz.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $2x^2+[x]-\{x\}+1=0$ tenglamani yeching.

2. $[x]^2=3x+2$ tenglamani yeching.

3 ([1]). Agar $x\geq 1$ bo'lsa, $\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right]=\left[\sqrt{\sqrt{x}}\right]$ tenglamani yeching.

4 ([2]). $x^2-2\{x\}-3=0$ tenglamani yeching.

5 ([2]). a ning qanday qiymatlarida $x^2+4[x]+a=0$ tenglamaning barcha ildizlari arifmetik progressiya tashkil qiladi?

6 ([3]). Tenglamani yeching.

$[x]+[2x]+...+[nx]=1,\ \ n\geq 2,\ n\in N$

Adabiyotlar:

1. Гальперин Г.А., Тольпиго А.К. Московские математические олимпиады. Москва, 1986.

2. Rixsiev B.B., G'anixo'jayev N.N., Qo'rgonov T.Q., Qosimov H. Matematika olimpiadalari masalalari. Toshkent, 1993.

3. Mirzaahmedov M.A., Sotiboldiyev D. O'quvchilarni matematik olimpiadalarga tayyorlash. Toshkent, 1993.